

Logique pour l'informatique

Questions d'examens

Table des matières

1	Logique propositionnelle	3
1.1	Question 10 juin 2002	3
1.2	Question 10 juin 2003	3
1.2.1	Tableaux sémantiques	3
1.2.2	Formes normales	3
1.3	Question 14 juin 2003	3
1.4	Question 14 juin 2003	3
1.4.1	Déduction naturelle et résolution	3
1.4.2	Formes normales	3
1.5	Question 16 juin 2003	4
1.5.1	Déduction naturelle	4
1.5.2	Résolution	4
1.6	Question 16 juin 2003	4
1.7	Question 17 juin 2003	4
1.7.1	Tableaux sémantiques	4
1.7.2	Déduction naturelle	4
1.7.3	Résolution	5
1.8	Question 17 juin 2003	5
1.8.1	Déduction naturelle	5
1.8.2	Résolution	5
2	Logique du premier ordre	6
2.1	Question juin 2002	6
2.1.1	Modélisation	6
2.1.2	Interprétations et modèles de Herbrand	6
2.2	Question 10 juin 2003	6
2.2.1	Notions de base	6
2.2.2	Skolémisation	6
2.2.3	Modèle de Herbrand	6
2.3	Question 14 juin 2003	7
2.3.1	Modélisation	7
2.3.2	Interprétations et modèles de Herbrand	7
2.3.3	Résolution	7
2.4	Question 14 juin 2003	7
2.4.1	Résolution dans la logique du premier ordre	7
2.4.2	Programmation logique	8
2.5	Question 16 juin 2003	8
2.5.1	Modèles	8
2.5.2	Résolution	8
2.6	Question 16 juin 2003	8

2.6.1	Interprétations et modèles du premier ordre	8
2.6.2	Skolémisation	9
2.7	Question 17 juin 2003	9
2.7.1	Modèle de Herbrand	9
2.7.2	Modélisation	9
2.7.3	Résolution	9
2.8	Question 17 juin 2003	9
2.8.1	Modèles	9
2.9	Résolution	9
3	Théorèmes de Goedel	10

1 Logique propositionnelle

1.1 Question 10 juin 2002

Avec les méthodes des tableaux sémantiques et de la déduction naturelle, prouvez que la formule suivante est une tautologie :

$$((p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p \vee \neg q)) \rightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$$

Définissez les notions d'adéquation et de complétude de la méthode des tableaux sémantiques dans le cas propositionnel. Prouvez ces deux propriétés et montrez que l'algorithme associé termine dans tous les cas.

1.2 Question 10 juin 2003

1.2.1 Tableaux sémantiques

Montrez que les deux assertions suivantes sont valides grâce à la méthode des tableaux sémantiques :

- $vrai \models r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$
- $q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s \models \neg q$

1.2.2 Formes normales

Démontrez que chaque formule propositionnelle peut être mise en forme normale conjonctive et en forme normale disjonctive. Mettez en forme normale conjonctive la formule suivante :

$$r \rightarrow (s \rightarrow (t \wedge s \rightarrow r))$$

1.3 Question 14 juin 2003

Avec la méthode des tableaux sémantiques et de la déduction naturelle, prouvez que la formule suivante est une tautologie :

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q))$$

Définissez les notions d'adéquation et de complétude de la méthode des tableaux sémantiques dans le cas propositionnel. Prouvez ces deux propriétés et montrez que l'algorithme associé à la méthode termine dans tous les cas.

1.4 Question 14 juin 2003

1.4.1 Déduction naturelle et résolution

Démontrez grâce (i) à la méthode des tableaux sémantiques et grâce (ii) à la résolution, que la formule suivante est une tautologie :

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$$

1.4.2 Formes normales

Démontrez que chaque formule propositionnelle peut être mise en forme normale conjonctive et en forme normale disjonctive.

1.5 Question 16 juin 2003

1.5.1 Dédution naturelle

A l'aide de la déduction naturelle, montrez que :

1. $p \leftrightarrow (q \vee r), p \vee r, p \rightarrow \neg q \models \neg q \wedge p$

2. $q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s \models \neg q$

Etablissez l'adéquation de la règle de déduction suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} \neg\phi \text{ hyp} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \perp \text{ fin-hyp} \end{array}}{\phi} \text{ RAA}$$

1.5.2 Résolution

A l'aide de la résolution propositionnelle, établissez la *validité* de la formule suivante :

$$[(p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p)] \rightarrow [\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r]$$

Etablissez l'adéquation d'un pas de coupure dans la logique propositionnelle. Il faut donc prouver le théorème suivant :

Théorème. Si $C_3 = (\Gamma_3, \Delta_3)$ est une clause obtenue par la règle de coupure à partir des clauses $C_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ et $C_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$ alors C_3 est une conséquence logique de C_1 et C_2

1.6 Question 16 juin 2003

Avec les méthodes des tableaux sémantiques **et** de la déduction naturelle, prouvez l'assertion suivante :

$$q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s \models \neg q$$

Définissez les notions d'adéquation et de complétude de la méthode des tableaux sémantiques dans le cas propositionnel. Prouvez ces deux propriétés et montrez que l'algorithme associé termine dans tous les cas.

1.7 Question 17 juin 2003

1.7.1 Tableaux sémantiques

A l'aide de la méthode des tableaux sémantiques, montrez qu'il est **faux** que :

1. $p \leftrightarrow (q \vee r), p \vee r, p \rightarrow \neg q \models q \wedge p$

2. $q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s \models q$

1.7.2 Dédution naturelle

Etablissez l'adéquation de la règle de déduction suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} \neg\phi \text{ hyp} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \perp \text{ fin-hyp} \end{array}}{\phi} \text{ RAA}$$

1.7.3 Résolution

A l'aide de la résolution propositionnelle, établissez la *validité* de la formule suivante :

$$[(p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p)] \rightarrow [\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r]$$

Etablissez l'adéquation d'un pas de coupure dans la logique propositionnelle. Il faut donc prouver le théorème suivant :

Théorème. Si $C_3 = (\Gamma_3, \Delta_3)$ est une clause obtenue par la règle de coupure à partir des clauses $C_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ et $C_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$ alors C_3 est une conséquence logique de C_1 et C_2

1.8 Question 17 juin 2003

1.8.1 Déduction naturelle

A l'aide de la déduction naturelle, montrez que :

1. $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg r \models q$
2. $q \rightarrow (r \wedge s), \neg r \vee \neg s \models \neg q$

Etablissez l'adéquation de la règle de déduction suivante :

$$\frac{\begin{array}{cc} \psi_1 \text{ hyp} & \psi_2 \text{ hyp} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \psi_1 \vee \psi_2 & \phi \text{ fin hyp} \quad \phi \text{ fin hyp} \end{array}}{\phi} \vee_e$$

1.8.2 Résolution

A l'aide de la résolution propositionnelle, établissez la *validité* de la formule suivante :

$$[(p \wedge q) \wedge (r \rightarrow \neg p)] \rightarrow [\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r]$$

Etablissez l'adéquation d'un pas de coupure dans la logique propositionnelle. Il faut donc prouver le théorème suivant :

Théorème. Si $C_3 = (\Gamma_3, \Delta_3)$ est une clause obtenue par la règle de coupure à partir des clauses $C_1 = (\Gamma_1, \Delta_1)$ et $C_2 = (\Gamma_2, \Delta_2)$ alors C_3 est une conséquence logique de C_1 et C_2

2 Logique du premier ordre

2.1 Question juin 2002

2.1.1 Modélisation

- Définissez un prédicat p d'arité 2 qui modélise une relation d'ordre partiel, c'est-à-dire une relation *antisymétrique* et *transitive*.
- Formalisez la propriété que pour l'ordre défini par le prédicat p , toute paire d'éléments possède une borne inférieure ; c'est-à-dire que toute d'éléments possède toujours un troisième élément qui minore pour p les deux éléments de la paire.
- Donnez une structure d'interprétation qui satisfait les formules formalisant les points précédents et dont le domaine est $\mathcal{D} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

2.1.2 Interprétations et modèles de Herbrand

Soit le langage \mathcal{L} qui contient les symboles de fonction unaires f et g , le symbole de fonction d'arité 2 h et un prédicat unaire p . Soit la formule ϕ suivante

$$\forall x \forall y \cdot (\neg p(f(x)) \wedge \neg p(g(x)) \wedge \neg p(h(x, y))) \wedge \exists z \cdot p(z)$$

Cette formule est-elle satisfaisable, a-t-elle un modèle de Herbrand ? Dans les deux cas, si la réponse est positive, justifiez votre réponse en donnant un modèle pour la formule.

2.2 Question 10 juin 2003

2.2.1 Notions de base

Définissez les notions de satisfaisabilité, validité, consistance dans le cadre de la logique du premier ordre. Illustrez ces notions par des exemples.

2.2.2 Skolémisation

La skolémisation maintient-elle (i) la validité, (ii) la satisfaisabilité ? Dans les deux cas, prouvez ce que vous avancez. Skolémisez la formule suivante :

$$\forall x \forall z \exists y \exists w : (\forall t \cdot p(x, y, z, t)) \rightarrow \exists t \cdot q(w, t)$$

Donnez (si il en existe une) une interprétation qui rend vraie la formule après skolémisation. Que pouvez-vous en conclure sur la formule avant skolémisation ?

2.2.3 Modèle de Herbrand

Donnez un modèle de Herbrand pour la formule suivante :

$$[\forall x \cdot p(x, x) \rightarrow p(f(x), f(f(x)))] \wedge p(c, c)$$

2.3 Question 14 juin 2003

2.3.1 Modélisation

Soit un prédicat binaire r et un prédicat unaire p . Formalisez à l'aide de formules de la logique du premier ordre que la relation r a les propriétés suivantes :

- il existe au moins 2 paires distinctes de valeurs pour lesquelles la relation est vraie ;
- la relation est transitive dans le sous-ensemble des valeurs qui rendent vrai le prédicat p ;
- la relation r n'est pas complète.

2.3.2 Interprétations et modèles de Herbrand

Soit le langage \mathcal{L} qui contient les symboles de fonction unaires f et g , le symbole de fonction d'arité 2 h et un prédicat unaire p . Soit la formule ϕ suivante

$$\forall x \forall y \cdot (\neg p(f(x)) \wedge \neg p(g(x)) \wedge \neg p(h(x, y))) \wedge \exists z \cdot p(z)$$

Cette formule est-elle satisfaisable, a-t-elle un modèle de Herbrand ? Dans les deux cas, si la réponse est positive, justifiez votre réponse en donnant un modèle pour la formule.

2.3.3 Résolution

- Montrez que l'ensemble des clauses suivantes est non satisfaisable :

1. $\neg p(x) \vee q(x) \vee r(x, f(x))$
2. $\neg p(x) \vee q(x) \vee s(f(x))$
3. $t(a)$
4. $p(a)$
5. $\neg r(a, y) \vee t(y)$
6. $\neg t(x) \vee \neg q(x)$
7. $\neg t(x) \vee \neg s(x)$

- Démontrez le théorème suivant : "Si C est un résolvant de C_1, C_2 alors \bar{C} est une conséquence logique de $\bar{C}_1 \wedge \bar{C}_2$ ".

Pour ce faire, vous pouvez utiliser (sans l'établir), le lemme suivant :

Lemme. Soit $C(x_1, \dots, x_k)$ une clause et μ une structure pour le langage \mathcal{L} sur lequel est construite la clause. Si σ est une substitution telle que pour $i = 1, 2, \dots, k, \sigma(x_i) = t_i(y_1, y_2, \dots, y_t)$ et $b_1, b_2, \dots, b_t \in M_\mu$, on pose $a_i = t_i^\mu[b_1, b_2, \dots, b_t]$. La clause C satisfait alors :

$$\mu, [a_1, a_2, \dots, a_k] \models C \text{ ssi } \mu, [b_1, b_2, \dots, b_t] \models \sigma(C)$$

2.4 Question 14 juin 2003

2.4.1 Résolution dans la logique du premier ordre

Soit la formule $\forall x, y \cdot ((p(x, y) \vee q(y)) \rightarrow (\exists z \cdot p(x, z) \vee q(z)))$, si cette formule est une formule *valide* montrez-le grâce à la méthode de la résolution, sinon donnez une interprétation qui rend faux la formule.

Démontrez l'adéquation de la méthode de résolution dans la logique du premier ordre. Il faut donc établir le théorème suivant :

Théorème. Si C est un résolvant de C_1, C_2 alors \bar{C} est une conséquence logique de $\bar{C}_1 \wedge \bar{C}_2$.

Pour ce faire, vous pouvez utiliser (sans l'établir), le lemme suivant :

Lemme. Soit $C(x_1, \dots, x_k)$ une clause et μ une structure pour le langage \mathcal{L} sur lequel est construite la clause. Si σ est une substitution telle que pour $i = 1, 2, \dots, k, \sigma(x_i) = t_i(y_1, y_2, \dots, y_t)$ et $b_1, b_2, \dots, b_t \in M_\mu$, on pose $a_i = t_i^\mu[b_1, b_2, \dots, b_t]$. La clause C satisfait alors :

$$\mu, [a_1, a_2, \dots, a_k] \models C \text{ ssi } \mu, [b_1, b_2, \dots, b_t] \models \sigma(C)$$

2.4.2 Programmation logique

Considérez le programme PROLOG constitué des clauses de Horn suivantes :

1. $p(X, X) : - q(X, Y), r(X, Z).$
2. $p(X, X) : - s(X).$
3. $q(b, a).$
4. $q(a, a).$
5. $q(X, Y) : - r(a, Y).$
6. $r(b, Z).$
7. $s(X) : - q(X, a).$

Construisez l'arbre SLD correspondant à la question $p(X, X)$ sur ce programme.

2.5 Question 16 juin 2003

2.5.1 Modèles

Considérez les formules suivantes :

1. $\forall x \cdot p(x, x)$
2. $\forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
3. $\forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$

qui expriment que le prédicat binaire p est *réflexif*, *symétrique* et *transitif*. Montrez qu'aucune de ces formules n'est une conséquence logique de deux autres. Pour montrer cela, rappelez-vous qu'il suffit d'exhiber une interprétation qui satisfait les deux formules et pas la troisième.

2.5.2 Résolution

Soit la formule $\forall x, y \cdot ((p(x, g(y)) \vee q(f(y))) \rightarrow (\exists z \cdot p(x, z) \vee q(f(z))))$, si cette formule est une formule *valide* montrez-le grâce à la méthode de la résolution, sinon donnez une interprétation qui rend faux la formule.

2.6 Question 16 juin 2003

2.6.1 Interprétations et modèles du premier ordre

Considérez la formule de logique du premier ordre ϕ suivante :

$$\forall x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge (p(x, z) \rightarrow p(z, x)))$$

Lesquelles des interprétation suivantes satisfont ϕ ? (Justifiez votre réponse)

- l'interprétation μ_1 a comme domaine de valeurs l'ensemble des nombres naturels et $p^{\mu_1} = \{(m, n) | m < n\}$;
- l'interprétation μ_2 a comme domaine de valeurs l'ensemble des nombres naturels et $p^{\mu_2} = \{(m, 2 \times m) | m \text{ est un nombre naturel } \}$;
- l'interprétation μ_3 a comme domaine de valeurs l'ensemble des nombres naturels et $p^{\mu_3} = \{(m, n) | m < n + 1\}$.

2.6.2 Skolémisation

La skolémisation maintient-elle (i) la validité, (ii) la satisfaisabilité ? Dans les deux cas, prouvez ce que vous avancez. Skolémisez la formule suivante :

$$\exists x \exists y \cdot p(x, y) \wedge \forall x \cdot \neg p(x, x)$$

2.7 Question 17 juin 2003

2.7.1 Modèle de Herbrand

Donner un modèle de Herbrand pour la formule suivante :

$$[\forall x \cdot p(x) \wedge p(f(x))]$$

2.7.2 Modélisation

- Formalisez en logique du premier ordre à l'aide d'un prédicat binaire p , une relation d'ordre totale (transitive, antisymétrique et totale). Pour rappel, une relation est totale, si chaque paire d'éléments est ordonnée par la relation.
- A partir de la formalisation que vous obtenez ci-dessus, prouvez que tout ordre total est une relation réflexive. Pour cette preuve, utilisez la déduction naturelle.
- Donnez une structure d'interprétation qui rend vraies les formules que vous avez données au premier point ci-dessus et qui a comme domaine d'interprétation $\mathcal{D} = \{a, b, c, d, e\}$.

2.7.3 Résolution

Soit la formule $\forall x, y \cdot ((p(x, g(y)) \vee q(f(y))) \rightarrow (\exists z \cdot p(x, z) \vee q(f(z))))$, si cette formule est une formule *valide* montrez-le grâce à la méthode de la résolution, sinon donnez une interprétation qui rend faux la formule.

2.8 Question 17 juin 2003

2.8.1 Modèles

Considérez la formule ϕ suivante :

$$\forall x \forall y \cdot q(g(x, y), g(y, y), z)$$

Le prédicat q est un prédicat ternaire et g une fonction à deux arguments. Trouvez deux interprétations μ_1 et μ_2 et deux valuations v_1, v_2 tels que :

- $\mu_1, v_1 \models \phi$
- $\mu_2, v_2 \not\models \phi$

2.9 Résolution

Soit la formule $\forall x, y \cdot ((p(x, g(y)) \vee q(f(y))) \rightarrow (\exists z \cdot p(x, z) \vee q(f(z))))$, si cette formule est une formule *valide* montrez-le grâce à la méthode de la résolution, sinon donnez une interprétation qui rend faux la formule.

3 Théorèmes de Goedel

- Expliquez intuitivement la portée du théorème d'incomplétude de Goedel et sa relation avec le théorème de complétude.
- Démontrez le théorème d'incomplétude