Structures discrètes

©1997, Rodolphe Wouters
mise à jour 2003, Julien Heck

18 septembre 2003

Table des matières

Chapitre 1

Questions de l'examen

Ce tuyaux contient certaines des réponses aux questions types de l'examen (partie pratique uniquement) données dans le tuyaux de Glaude David (1994).
Notons que le plus important est de tout justifier (chaque ligne) y compris dans les démonstrations de la partie théorique.
La partie pratique contient 4 questions qui sont généralement :
- Une équation de Catalan ou de Fibonacci à démontrer.
- Une sommation.
- Un problème combinatoire (guichet, ..).
- Un problème de division modulo (classique).

Comme d'habitude, ce tuyaux aussi peut comporter des erreurs. Si quelqu'un décide de l'améliorer en ajoutant des réponses à d'autres examens ou n'importe quoi d'autre, le cercle (Touffu) dispose du fichier latex de ce document.

Chapitre 2

Petit Résumé

Les tuyaux précédents résument déjà très bien les formules principales et elles ne sont pas reprises ici mais voici quand même quelques petits rappels :

2.1 Permutations

Le nombre de permutations de n objets **distincts** pris ensembles $= n!$ car on a n choix pour le 1er, $n-1$ pour le second, ...
Le nombre de permutations de n objets **distincts** pris par ensembles de k est

- *sans répétitions* de $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- *avec répétitions* de n^k.

2.2 Combinaisons

La différence avec les permutations est qu'ici les objets sont indiscernables (**non distincts**).
Le nombre de combinaisons différentes de n objets pris par ensembles de k est

- *sans répétitions* de $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$.
- *avec répétitions* de $\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array}\right)$.

2.3 Nombres de Catalan

Donne le nombre de manières de parenthéser un produit de n facteurs.

$$\mathcal{C}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array}\right) \tag{2.1}$$

Plusieurs types de problèmes peuvent se résoudre par des nombres de Catalan :

- $A_n = \mathcal{C}_{n+1} = A_0A_{n-1} + A_1A_{n-2} + \cdots + A_{n-1}A_0$ est le nombre d'arbres binaires à n sommets (on suspend à gauche $k, 0 \leq k < n$ sommets et $n-1-k$ à droite).
- $\mathcal{C}_{n-1}$ donne le nombre de triangulations d'un n-gone convexe.
- Dans un carré nxn, $\mathcal{C}_n$ donne le nombre de chemins minimaux reliant A' à B' sans traverser la diagonale AB et **sans la toucher**. Dans un carré nxn, $\mathcal{C}_{n+1}$ donne le nombre de chemins minimaux reliant A' à B' sans traverser la diagonale AB et **en la touchant**.

2.4 Chemins minimaux

Le nombre de chemins minimaux reliant deux sommets opposés d'un quadrillage axb est de $\left(\begin{array}{c} a+b \\ a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a+b \\ b \end{array}\right)$ = nombre de manières de choisir où on va mettre a "H" dans un mot de $a+b$ lettres

2.5 Récurrences

– Ecrire l'équation caractéristique.
– Factoriser.
– Tirer la solution d'après les conditions initiales.

2.6 Nombre de solutions d'une équation

Soit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ avec $x_i > 0$. La question équivant à diviser un segment de longueur 14 avec 3 cassures (4-1). Il y a 13 cassures possibles (14-1), on obtient donc $\left(\begin{array}{c} 13 \\ 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} u-1 \\ t-1 \end{array} \right)$. Si on a $x_i \geq 0$, on obtient $\left(\begin{array}{c} u+t-1 \\ t-1 \end{array} \right)$
Si on n'a pas $= 14$ mais < 14, on ajoute une variable u qui prend le reste.

Chapitre 3

Comportement asymptotique

3.1 QA1 [JUIN88]

Quel est le comportement asymptotique de la fonction $f(n) = \frac{(n!)^{2n}}{((2n)!)^n}$ *? Que vaut* $\lim_{n\to 2} f(n)$ *?*

Stirling nous donne directement

$$\frac{(n!)^{2n}}{((2n)!)^n} \sim \frac{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^{2n}}{(\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n})^n}$$

Ensuite,

$$= \frac{2^n}{2^n}(\pi n)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^{2n^2}} = \frac{(\pi n)^{\frac{n}{2}}}{4^{n^2}} \sim 0$$

Le dénominateur croît plus vite et le tout tend donc vers 0.

3.2 QA2 [JUIN92]

On lance n fois de suite une pièce de monnaie supposée parfaitement équilibrée. Que vaut l'espérance mathématique de $|F_n - P_n|$ où F_n est le nombre de faces et P_n est le nombre de piles obtenus au cours des n jets ? Simplifier le plus possible l'expression de cette espérance et calculer son comportement asymptotique lorsque $n \to \infty$.

La proba de F_n est de $\frac{1}{2}$, celle de P_n aussi. On répète n fois l'expérience où l'événement peut se produire avec une proba p. C'est donc une binomiale $B(n, \frac{1}{2})$. Il suffit donc de l'exprimer en somme et de simplifier. On trouvera que l'espérance de $|F_n - P_n|$ est de $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

3.3 QA3 [SEPT88, JUIN90]

Que vaut $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} + \frac{1}{3n+7} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1})$ *?*
Tout y est sauf les multiples de 3.

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} + \frac{1}{3n+7} + \cdots + \frac{1}{6n-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} H_{6n} - H_{3n} - \frac{1}{3}H_{2n} + \frac{1}{3}H_n$$

Le $H_{6n} - H_{3n}$ représente simplement la suite s'il y avait eu les multiples de 3. Le

$$\frac{1}{3}H_{2n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+6} + \cdots + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n}$$

sert à enlever les multiples de 3. L'ennui, c'est qu'on a enlevé en même temps
$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots$

de trop. On les rajoute donc de nouveau en faisant $+\frac{1}{3}H_n$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}(\log 6n + \gamma - \log 3n - \gamma - \frac{1}{3}\log 2n - \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}\log n + \frac{1}{3}\gamma) \\
&= \lim_{n\to\infty} \log(6n\frac{1}{3n}\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}n^{\frac{1}{3}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \log 2^{1-\frac{1}{3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \log 2^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\log 2
\end{aligned}
$$

3.4 QA4 [JUIN86]

Que vaut $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n})$ *?*

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}) &= \lim_{n\to\infty} H_{2n} - H_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \log 2n + \gamma - \log n - \gamma \\
&= \lim_{n\to\infty} \log 2 \\
&= \log 2
\end{aligned}
$$

3.5 QA5 [JUIN86]

Que vaut $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n+1000}{p_n}$ *?*

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{p_n+1000}{p_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n + 1000}{n\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1000}{n\log n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Le $n\log n$ tend vers 0, on trouve donc comme solution 1.

Chapitre 4

Comptage

4.1 QC1 [JUIN92]

De combien de facons peut-on ranger 100 boules noires, 100 blanches, 100 jaunes et 100 rouges dans 5 boîtes différentes A, B, C, D, E si

1. *tous les arrangements possibles sont permis ?*
2. *aucune boîte ne peut être vide.*

Deux boules de même couleur sont indiscernables l'une de l'autre.

1. Tous les rangements sont permis. On peut donc avoir un boîte vide. On a l'équation
$$\begin{aligned} A_n + B_n + C_n + D_n + E_n &= 100 \\ A_b + B_b + C_b + D_b + E_b &= 100 \\ A_j + B_j + C_j + D_j + E_j &= 100 \\ A_r + B_r + C_r + D_r + E_r &= 100 \end{aligned}$$
avec $A_n \geq 0$ et donc $A_n + 1 > 0$ (idem pour les autres). On a donc en ajoutant aux deux membres 5 et en posant $A_n' = A_n + 1$, $A_n' + B_n' + C_n' + D_n' + E_n' = 105$. On sait que le nombres de solutions de cette équation est de $\begin{pmatrix} 104 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vu qu'il y a 4 équations, le nombre de solutions total est de $\begin{pmatrix} 104 \\ 4 \end{pmatrix}^4$.
2. Aucune boîte vide. Il faut soustraire du nombre de solutions avec boîtes vides (cas ci-dessus), le nombre de cas avec boîtes vides càd où il n'y a ni noire, ni blanche, ni ...
On tient donc le raisonnement suivant :
   - *La boîte A est vide.* On répartit donc dans les autres boîtes : $B_n + C_n + D_n + E_n = 100$ où $B_n, C_n, D_n, E_n \geq 0$. Le nombre de solutions est donc de $\begin{pmatrix} 103 \\ 3 \end{pmatrix}^4$ car on a 4 équations. Le raisonnement est identique si B est vide ou C ou D ou E. On a donc 5 choix, càd $5 \begin{pmatrix} 103 \\ 3 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 103 \\ 3 \end{pmatrix}^4$.
   - *La boîte A et B sont vides.* On répartit dans les autres boîtes. On a donc $\begin{pmatrix} 102 \\ 2 \end{pmatrix}^4$. Mais on a $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ choix. Le nombre total de solutions est donc de $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 102 \\ 2 \end{pmatrix}^4$.
   - *3 boîtes vides.* $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 101 \\ 1 \end{pmatrix}^4$.
   - *4 boîtes vides.* $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}^4$.

Mais ces évenements se contiennent : 4 boîtes vides impliquent 3 boîtes vides qui en impliquent deux, ...
Le nombre de manières en n'ayant aucune boîte vide est donc égal au nombre total avec boites vides - (nombre de cas avec 1 boîte vide - (nombre de cas avec 2 boîtes vides - (nombre de cas avec 3 boîtes vides - nombre de cas avec 4 boîtes vides))), ce qui donne

$$= \begin{pmatrix} 104 \\ 4 \end{pmatrix}^4 - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 103 \\ 3 \end{pmatrix}^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 102 \\ 2 \end{pmatrix}^4 - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 101 \\ 1 \end{pmatrix}^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}^4$$

4.2 QC2 [SEPT88,JUIN94], QC3 [SEPT90], QC4 [JUIN86]

Le raisonnement est complètement identique au précédent.

4.3 QC5 [SEPT92]

Un ensemble de $2n$ personnes est formé de n couples (mari/femme).

1. *Combien y-a-til de de sous-ensembles ne contenant aucun couple ?*
2. *Si les $2n$ personnes décident de s'asseoir au hasard sur une rangée de $2n$ chaises, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un couple côte à côte ?*

Pour la première sous-question, si $n = 1$, il y a 2 personnes et 3 sous-ensembles : mari, femme, . Pour chaque couple, il y a trois possibilités : on prend le mari mais pas la femme, on prend la femme mais pas le mari ou en en prend aucun des deux. La solution est donc 3^n.
Pour la deuxième sous-question, la proba qu'il y ait au moins un couple côte à côte est égale à 1 moins la proba qu'il n'y ait aucun couple côte à côte, cad $1 - \frac{P}{(2n)!}$ où P est le nombre de cas favorables et $(2n)!$ est le nombre de cas possibles.
Il suffit donc de déterminer P.
Pour les n femmes, il y a $n!$ possibilités. Si on veut ensuite placer les n hommes,
– Pour le 1er, il y a $n + 1$ positions moins 2 à côté de sa femme, càd $n - 1$ positions.
– Pour le 2ème, il y a $n + 2$ positions moins 2 à côté de sa femme, càd n positions.
– ...
– Pour le nème, il y a $n + n = 2n$ positions moins 2, càd $2n - 2$ positions.
On a donc

$$\begin{aligned} P &= n!(n-1)n(n+1)\dots(2n-2) \\ &= \frac{(2n)!(n-1)n}{2n(2n-1)} \\ &= \frac{(2n)!(n-1)}{4n-2} \end{aligned}$$

La solution finale est donc de

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{n-1}{4n-2} \\ &= \frac{4n-2-n+1}{4n-2} \\ &= \frac{3n-1}{4n-2} \end{aligned}$$

4.4 QC6 [JUIN88]

Même raisonnement.

4.5 QC7 [JUIN88]

On a AAABBBBCCCCC. Combien de mots de 12 lettres peut-on former sachant que les lettres de même type ne sont pas TOUTES côte à côte.

Soit $E = \frac{12!}{3!4!5!}$ le nombre de mots qu'on peut écrire avec ces lettres. Soit $A = \frac{10!}{4!5!}$ l'ensemble où on a tous les A côte à côte. Soit $B = \frac{9!}{3!5!}$ l'ensemble où on a tous les B côte à côte. Soit $C = \frac{8!}{3!4!}$ l'ensemble où on a tous les C côte à côte.
E comprend A, B, C et A, B, C s'intersectionnent mutuellement : $A \cap B = \frac{7!}{5!}$ est l'ensemble où les A et B sont cote à cote. $A \cap C = \frac{6!}{4!}$ est l'ensemble où les A et C sont cote à cote. $B \cap C = \frac{5!}{3!}$ est l'ensemble où les B et C sont cote à cote. $A \cap B \cap C = 3!$ est l'ensemble où les A et B et C sont cote à cote.
On a donc comme solution $E - (A + B + C) + (A \cap B + A \cap C + B \cap C) - A \cap B \cap C = 25762$

4.6 QC8 [JUIN86]

Avec les lettres AAAABBBBCCCC, combien peut)on écrire de mots de 12 lettres dans lesquels chaque lettre a au moins une voisine identique ?

On groupe par paires, càd qu'on divise le mot par deux :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6!}{2!2!2!}$$

4.7 QC11 [SEPT91]

Dans un bureau de poste, il y a k guichets nuémrotés de 1 à k. De combien de facons différentes peut-on répartir n personnes en files devant ces guichets (on n'est pas obligé de former une file devant chaque guichet) ?

On a l'équation suivante :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k &= n \geq 0 \\ x_1' + x_2' + \cdots + x_k' &= n + k > 0 \end{aligned}$$

dont le nombre de solutions est de $\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Vu que les personnes sont distinctes, on multiplies par $n!$:

$$n! \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

4.8 QC12 [JUIN88,JUIN89,SEPT90,JUIN96,SEPT03]

Lorsqu'on envoie un rayon lumineux (vu comme un faisceau de photons) sur la réunion de deux plaques de verre adjacentes, chaque photon peut se réfléchir sur le plan de séparation des deux plaques de verre ou sur l'un des plans de séparation air-verre ou verre-air. Combien un photon a-t-il de trajectoires possibles s'il se réfléchit exactement n fois ?

Combien y a-t-il de manières a_n pour un rayon de passer à travers ou d'être réfléchi après avoir changé de direction n fois ? Quand n est impair, on a un nombre impair de rebonds et le rayon passe à travers. Quand n est pair, le rayon est réfléchi et réemerge du même côté qu'il est entré.
Les a_n ressemblent aux nombres de Fibonnaci. Si on regarde la figure, on peut dire pourquoi. Pour $n \geq 2$, les rayons réfléchis n fois soit se réfléchissent pour la première fois sur la surface opposée en continue de a_{n-1} manières, soit ils commencent par se réfléchir sur la surface du milieu et ensuite de retour pour continuer de a_{n-2} manières.
On a donc la récurrence $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Mais les conditions initiales sont différentes car on a $a_0 = F_2 = 1$ et $a_1 = F_3 = 2$ sur la figure. Ainsi, tout est shifté de deux places et $a_n = F_{n+2}$.

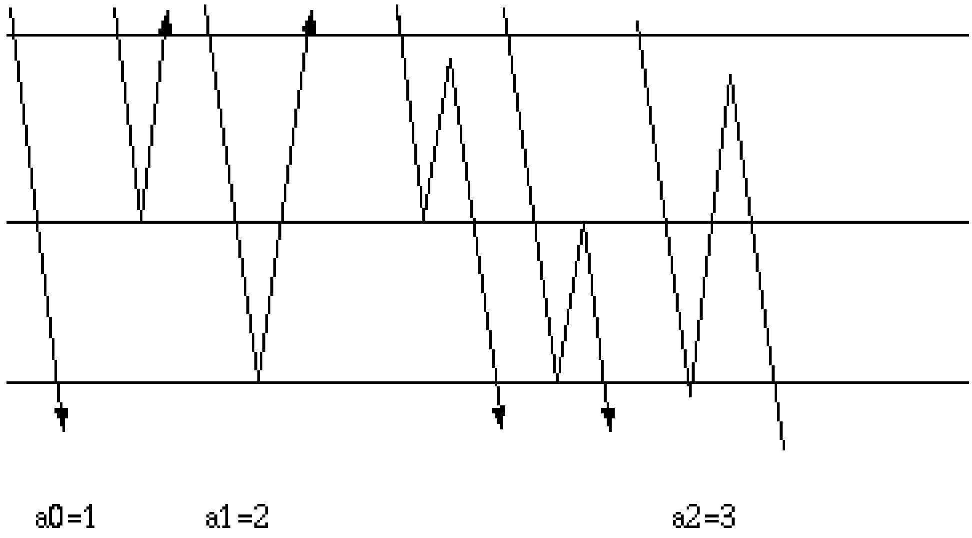


FIG. 4.1 – Un rayon de Fibonnacci

4.9 QC13 [SEPT86]

De combien de manières peut-on paver un rectangle $2 * n$ *par des dominos* $2 * 1$ *?*

Soit on prend un domino $2 * 1$ vertical et il reste a_{n-1} manières, soit on en prend un horizontal et il reste a_{n-2} manières.
Il s'agit donc de Fibonacci mais les conditions initiales sont différentes : $a_0 = F_1 = 1$ (rectangle 2x0) et $a_1 = F_2 = 1$ (rectangle 2x1). Donc $a_n = F_{n+1}$.

4.10 QC15 [JUIN92,JUIN94]

Combien y-a-til de permutations α *des éléments de l'ensemble* $1, 2, 3, \ldots, n$ *telles que* $|\alpha(k) - k| \leq 1 \forall k = 1..n$ *?*
$\alpha(k)$ est le kème dans la permutation.
La position dans la permutation moins la position dans 1,..,n est donc ≤ 1. On ne peut donc permuter que deux éléments consécutifs (l'élément k ne peut aller qu'en $k - 1$ ou $k + 1$ ou rester en k).
Pour $n = 1$, on a

```
{1}
```

et le nombre de permutations est de $1 = F_2$. Pour $n = 2$, on a

```
{1,2}
```

et le nombre de permutations

```
{1,2},{2,1}
```

est de $2 = F_3$. Pour $n = 3$, on a

```
{1,2,3}
```

et le nombre de permutations

```
{1,2,3},{1,3,2},{2,1,3}
```

est de $3 = F_4$.
Ca ressemble à Fibo. Pourquoi ? Parce que soit on ne permute pas le 1er et il reste a_{n-1} solutions, soit on permute le 1er avec le 2eme et il reste a_{n-2} solutions.
Vu les conditions initiales, on a $a_n = F_{n+1}$.

4.11 QC16 [SEPT85]

Soient a, b, c des entiers positifs. Avec abc cubes $1 * 1 * 1$, on fabrique un parallépipède rectangle ax b x c. Si x et y sont 2 sommets opposés de ce parallélipipède, combien y a-t-il de chemins de longueur minimum qui, en suivant les arêtes du cube relient x à y ?

Ce problème est équivalent à trouver le nombre de mots de $a + b + c$ lettres contenant a fois A, b fois B, c fois C, càd

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b+c \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

4.12 QC20 [JUIN91]

On choisit au hasard un nombre naturel impair de 100 chiffres (décimal). Quelle est la proba qu'il soit premier ?

$$= \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Le nombre de cas possibles est de $\frac{(10^{100}-1)-10^{99}}{2}$. Le numérateur exprimant le nombres de 100 chiffres compris entre les deux bornes $10^{100} - 1$ et 10^{99} et le dénominateur donnant uniquement les nombres impairs.
Le nombre de cas favorables se calcule différement. On sait que tous les nombres premiers sont impairs. On a

$$\begin{aligned} &= \pi(10^{100} - 1) - \pi(10^{99}) \\ &= (10^{100} - 1)\log(10^{100} - 1) - 10^{99}\log(10^{99}) \end{aligned}$$

en sachant que 10^{99} n'est pas premier (car divisible par 10).

Chapitre 5

Divisibilité modulo

5.1 QD1 [JUIN88]

Prouver que le nombre naturel 465465 a la propriété suivante : $465465 \mid mn(m^{60}-n^{60}) \forall m,n \in \mathcal{N}$ *Pouvez-vous trouver un nombre naturel plus grand ayant la même propriété ?*

$465465 = 3.5.7.11.13.31$
Il faut montrer $mn(m^{60}-n^{60}) \equiv 0 \pmod{465465}$. Pour cela, on procède en plusieurs étapes :

1. *Est-ce que* $5 \mid mn(m^{60}-n^{60})$? On a deux cas :
   - $5 \mid m$ ou $5 \mid n$. Pas de problème, la réponse est oui.
   - $5 \not| m, 5 \not| n$.
     Par *FERMAT*, on a

$$\begin{array}{rll} 5 \text{ premier et } 5 \not| m, & \Rightarrow & m^4 \equiv 1 \pmod{5} \\ & \Rightarrow & m^{60} \equiv 1^{15} \pmod{5} \\ 5 \text{ premier et } 5 \not| n, & & \\ & \Rightarrow & n^4 \equiv 1 \pmod{5} \\ & \Rightarrow & n^{60} \equiv 1^{15} \pmod{5} \end{array}$$

     Et donc,

$$\begin{array}{rll} (m^{60}-n^{60}) & \equiv & (1-1) \pmod{5} \\ & \equiv & 0 \pmod{5} \end{array}$$

     Et tout va bien, la réponse est oui aussi.
2. *Est-ce que* $3 \mid mn(m^{60}-n^{60})$? On a deux cas :
   - $3 \mid m$ ou $3 \mid n$. Pas de problème, la réponse est oui.
   - $3 \not| m, 3 \not| n$.
     Par *FERMAT*, on a

$$\begin{array}{rll} 3 \text{ premier et } 3 \not| m, & \Rightarrow & m^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ & \Rightarrow & m^{60} \equiv 1^{30} \pmod{3} \\ 3 \text{ premier et } 3 \not| n, & & \\ & \Rightarrow & n^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ & \Rightarrow & n^{60} \equiv 1^{30} \pmod{3} \end{array}$$

     Et donc,

$$\begin{array}{rll} (m^{60}-n^{60}) & \equiv & (1-1) \pmod{3} \\ & \equiv & 0 \pmod{3} \end{array}$$

Et tout va bien, la réponse est oui aussi.

3. idem pour 7, 11, 13, 31.

Les nombres possédant la même propriété sont ceux égaux à 465465 multipliés par un autre nombre premier $(2, 17, 29, \ldots)$.

5.2 QD2 [SEPT88,JUIN91]

Pour quelles valeurs de $n \in \mathcal{N}$, le nombre $n^{397} - n$ est divisible par 399 ?

Pour quel n a-t-on $399 \mid n(n^{396} - 1)$ avec $399 = 3.7.19$. De manière identique à l'exercice précédent, on prouve que

1. $3 \mid n^{397} - n$. On sait par *FERMAT* que $3 \mid n^3 - n \forall n$. On va donc essayer de mettre tout le temps ca en évidence et retirer le termes qu'on ajouté de trop :

   $$n^{397} - n = (n^3 - n)n^{394} + n^{395} - n$$

   On sait que $(n^3 - n)$, il ne reste donc plus qu'à prouver que c'est aussi le cas pour $n^{395} - n$ de la même manière :
   $$n^{395} - n = (n^3 - n)n^{392} + n^{393} - n$$

   Le problème est récurrent (on enlève chaque fois deux à l'exposant) et mène à

   $$3 = n - n, \text{ vrai } \forall n$$

2. On fait de même pour 7 et 19.

5.3 QD3 [JUIN89,JUIN94]

Démontrer que le nombre naturel 5320 a la propriété $5320 \mid mn(m^{36} - n36) \forall m, n$ de même parité. Pouvez-vous trouver un nombre plus grand que 5320 avec la même propriété ?

$5320 = 2^3.5.7.19$.

1. *Est-ce que* $2^3 \mid mn(m^{36} - n36)$ *?* Attention : 2^3 n'est pas un nombre premier, on n'est donc pas dans les conditions du théorème de *FERMAT* ! On a deux cas :
   - $2 \mid mn$. On a même parité. OK.
   - $2 \not| mn$. On a $m^{36} - n^{36} =?$ et on est bloqué, on peut rien dire.
2. *Est-ce que* $5 \mid mn(m^{36} - n36)$ *?* On applique *FERMAT* comme dans QD1 car 5 est premier. On fait de même pour 7 et 19.

Les solutions $2^{k_1}.5^{k_2}.7^{k_3}.19^{k_4}$ avec $k_i \geq 0$ marchent aussi.

5.4 QD4 [SEPT91,JUIN92]

Prouver que $420 \mid n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n \forall n \in \mathcal{N}$. Pouvez-vous trouver un naturel plus grand avec la même propriété ?

$420 = 3.4.5.7$.

1. $$3 \mid n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$$

   $$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n \stackrel{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\ \Leftrightarrow \quad & n^7 - 2n^5 + n^3 - 0 \stackrel{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

De plus, Fermat nous dit que $3 \mid n^3 - n$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad n^7 - 2n^5 + (n^3 - n) + n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\
&\Leftrightarrow \quad n^7 - 2n^5 + n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\
&\Leftrightarrow \quad (n^3 - n)n^4 + n^5 - 2n^5 + n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -n^5 + n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -(n^3 - n)n^2 - n^3 + n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -n^3 + n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3 \\
&\Leftrightarrow \quad n^3 - n \overset{?}{\equiv} 0 \pmod 3
\end{aligned}$$

Ce qui est vrai $\forall n$.

2. Idem pour 2,5,7.

5.5 QD5 [SEPT90]

Idem que QD1 avec $2387 = 11.7.31$.

5.6 QD6 [SEPT92]

Si p, q, r sont trois nombres premiers distincts deux à deux, prouver que $(pq)^{r-1} + (qr)^{p-1} + (rp)^{q-1} - 1$ est divisible par pqr.

Prouvons d'abord que p divise cette expression. p divise pq, pr et 1 dans l'équation mais pour qr, on sait pas encore dire. On doit donc prouver juste pour lui
Par FERMAT, on a que

$$p \text{ premier et } p \not| qr \Rightarrow p \mid (qr)^{p-1} - 1$$

On a donc $p \mid (pq)^{r-1} + (qr)^{p-1} + (rp)^{q-1} - 1$.
On fait idem pour q et r.

5.7 QD7 [JUIN94]

Trouver un entier x tel que $485x \equiv 1 \pmod{2001}$.

Notons que si on avait pas eu 1 (pour $\equiv 1 \pmod{2001}$), le raisonnement qui va suivre est valable aussi ; il suffira de multiplier après.
Par **Gauss**, on doit trouver le pgcd $(485, 2001)$. On a $2001 - 485.4 = 61$ et donc $(485, 61)$. On a $485 - 61.7 = 58$ et donc $(58, 61)$ càd $(58, 3) \Rightarrow (58, 3) \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow (1, 0)$. OK, $(485, 2001) = 1$.
On a donc 1 solution (si plusieurs, on divise par ce nombre).
Par **Bézout**, on a que $485x + 2001y = 1$ pour un certain x et un certain y.
Par **Euclide**, on calcule

x	y	$485x + 2001y$	$= 1$
0	1	2001	L_1
1	0	485	L_2
-4	1	61	$L_3 = L_1 - 4L_2$
29	-7	58	$L_4 = L_2 - 7L_3$
-33	8	3	$L_5 = L_3 - L_4$
656	-159	1	$L_4 - 19L_5$

On a $485.656 \equiv 1 \pmod{2001}$ et donc $x \equiv 656.1(2001)$. Notons que si on avait pas eu 1 (pour $\equiv 1 \pmod{2001}$), le raisonnement ; il suffit de multiplier non pas par 1 mais par le nombre.

Chapitre 6

Sommations

On a souvent une somme sur un produit de quelque chose avec un coéfficient binomial. On procède alors de la sorte :

1. On essaie d'enlever ce qu'il y a devant le binome par la formule de récurrence additive qui correspond à dire qu'un élément du triangle de pascal est égale à la somme de ses 2 éléments supérieurs :
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{avec } 0 < k < n \tag{6.1}$$
comme dans l'exemple QD1 ou en mettant en évidence (récurrence multiplicative) comme dans QD2 :
$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} \quad \text{avec } 0 < k \leq n \tag{6.2}$$
ou par simple symétrie (cf. triangle de Pascal)
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{6.3}$$
On sort donc des termes du coéfficient binomial pour les rentrer de nouveau.
2. Maintenant qu'on a juste une somme sur le binome ou sur le binome au carré, on applique une des formules suivantes : Le binôme de Newton et son cas particulier
$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \tag{6.4}$$
$$2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \tag{6.5}$$
La somme au carré
$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{r}^2 \tag{6.6}$$
$$= \binom{2n}{n} \tag{6.7}$$
la somme parallèle et la somme haute
$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n} \tag{6.8}$$
$$\sum_{k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \tag{6.9}$$
3. On simplifie comme une équation normale maintenant.

6.1 QE1 [JUIN88]

Que vaut $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *?*
On sait que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \sum \frac{1}{k+2} \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} - \sum \frac{1}{k+2} \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n+2} \sum \frac{n+2}{k+2} \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} - \frac{1}{n+1} \sum \frac{n+1}{k+2} \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n+2} \sum \begin{pmatrix} n+2 \\ k+2 \end{pmatrix} - \frac{1}{n+1} \sum \begin{pmatrix} n+1 \\ k+2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n+2}(2^{n+2} - 1 - (n+2)) - \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1 - (n+1)) \\ &= \frac{1}{n+2}(2^{n+2} - n - 3) - \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - n - 2) \\ &= \frac{n\ 2^{n+1} + 1}{(n+2)\ (n+1)} \end{aligned}$$

6.2 QE2 [SEPT88]

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2 &= \sum k^2 (\frac{n}{k} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix})^2 \\ &= n^2 \sum \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}^2 \\ &= n^2 \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.3 QE3 [JUIN89]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= n \sum k \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\ & \quad \text{par récurrence additive} \\ &= n \sum k [\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}] \\ &= n^2 \sum \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} - n(n-1) \sum \begin{pmatrix} n-2 \\ k-1 \end{pmatrix} \\ &= n^2 2^{n-1} - n(n-1)2^n - 2 \\ &= n2^{n-2}(2n - (n-1)) \\ &= n(n+1)2^{n-2} \end{aligned}$$

6.4 QE4 [SEPT92]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(n^2-2k^2)\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}(n^2-2k^2)\binom{n}{k}^2 \\
&= n^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 - 2k^2\binom{n}{k}^2 \\
&\quad \text{le deuxième terme est celui de l'excercice E2} \\
&= n^2\binom{2n}{n} - 2n^2\binom{2n-2}{n-1}) \\
&= n^2\binom{2n}{n} - 2n^2\binom{2n-2}{n-1})
\end{aligned}$$

6.5 QE5 [SEPT92]

On a deux coefficients binomiaux. On va essayer d'en faire un seul ou d'en rendre un indépendant de k. La méthode générale est de transformer les coefficients binomiaux en un produit de factorielles, d'essayer de simplifier et ensuite d'essayer de multiplier par une fraction pour réarranger en coefficients binomiaux.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{r}(k+2)\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} &= \sum_{k=0}^{r}(k+2)\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!} \\
&= \sum_{k=0}^{r}(k+2)\frac{n!}{k!}\frac{1}{(r-k)!(n-r)!} \\
&\quad \text{On multiplie par } \tfrac{r!}{r!} \\
&= \sum_{k=0}^{r}(k+2)\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{r!}{k!(r-k)!} \\
&\quad \text{Le premier coéfficient binomial est indépendant de } k \\
&= \binom{n}{r}\sum_{k=0}^{r}(k+2)\binom{r}{k} \\
&= \binom{n}{r}(\sum k\binom{r}{k} + 2\sum\binom{r}{k}) \\
&= \binom{n}{r}(r\sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1} + 2\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}) \\
&= \binom{n}{r}(r2^{r-1} + 2\ 2^r) \\
&= \binom{n}{r}(2^{r-1}(r+4))
\end{aligned}$$

6.6 QE6 [SEPT03]

$$\sum_{k=0}^{n}k^3\binom{n}{k}$$

(pas encore fait)

Chapitre 7

Examen de sept96

7.1 Partie théorique

Voici quelques unes des questions de la partie théorique (elles n'y sont pas toutes).

1. *Donner un exemple de deux nombres dont le calcul du pgcd nécessite 5000 itérations.*
   F_{5001} et F_{5002}
2. *Retrouver le numéro manquant dans l'ISBN suivant 3-540-9 ?220-X.*
   7.
3. *Quel est le nombre de solutions de* $x + y + z + t = 100$ *sachant que* $x \geq 0, y > 10, z > 20, t > 30$ *?*
   $\begin{pmatrix} 40 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. *Quelle est la solution générale de* $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n - 3^{n+1} \forall n \geq 0$ *?*
   $u_n = (An^2 + B^n + C)1^n - 3^{n+1}\frac{1}{8}$.
5. *Quel est le nombre d'arbres binaires de n sommets ?*
   $\mathcal{C}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.
6. *Caluler les comportements asymptotiques suivants :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} H_{3n} - H_{2n} &= \log \frac{1}{2} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{\sqrt{3^n}} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{(\log n)^3} &= +\infty
\end{aligned}$$

7. *100 objets dans 20 boîtes. Quel est le nombre de solutions sans restrictions ? Quel est le nombre de solutions avec ancune boîte vide ?*
   Sans restriction : $\begin{pmatrix} 119 \\ 19 \end{pmatrix}$.
   Aucune boîte vide : $\begin{pmatrix} 99 \\ 19 \end{pmatrix}$.

7.2 Partie pratique

1. $F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} = \frac{F_{3n+2}-1}{2}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n+1}{k+1}}$
3. Avec n guichets, k personnes et sachant qu'un guichet peut être vide, combien y a-t-il de manières de placer les personnes ?
4. $465465 \mid mn(m^{60} - n^{60})$

La première question se résout facilement par récurrence en remplacant les F_n par $F_{n-1} + F_{n-2}$ des deux côtés. Les termes s'éliminent un par un. Les deuxième et troisième équations se résolvent par les techniques habituelles (pour la sommation, il faut decomposer les binômes en factorielles et essayer de rendre un des coefficients indépendants de k). La dernière question à déjà été résolue ici.

Chapitre 8

Examen de juin 2002

8.1 Partie pratique

1. Avec l'alphabet a, b, c, d, e, f, g combien peut-on écrire de mots de n lettres dans lesquels on ne trouve pas 2 a, 2 b ni 2 c l'un à côté de l'autre ?
2. Combien y a-t-il de matrices $2 \times n$ à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes :
   (a) dans chacune des 2 lignes, chacun des entiers 1,2,3,. . .,n apparaît une et une seule fois.
   (b) dans chacune des n colonnes, la valeur absolue de la différence des 2 coefficients est ≤ 1.
3. Simplifier le plus possible :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}}$$

4. De combien de façons peut-on arranger 20 boules noires, 20 blanches, 20 fuschia et 20 indigo dans 6 boîtes différentes
   (a) si tous les rangements sont permis.
   (b) si aucune boîte n'est vide.
   (2 boules de même couleur sont indiscernables)

Chapitre 9

Examen de juin 2003

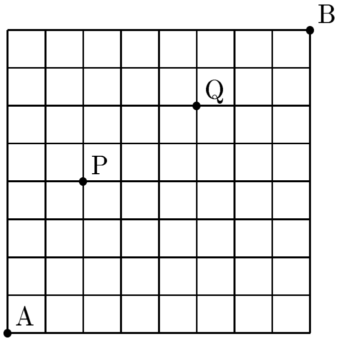
9.1 Partie théorique

1. *Quel est le nombre de manières de ranger 100 objets identiques dans 25 boîtes différentes, si aucune ne peut être vide ?*
   $\begin{pmatrix} 99 \\ 24 \end{pmatrix}$.
2. *Combien de multiplications de coefficients l'algorithme usuel nécessite-t-il pour multiplier 4 matrices 10×10 ?*
   3000.
3. *Résoudre la récurrence :* $u_{n+4} = 12u_{n+2} - 36u_n + 2^n \quad \forall n \geq 0$.
   $u_n = (An+B)(\sqrt{6})^n + 2^{n-2} + (Cn+D)(-\sqrt{6})^n$.
4. *Que vaut le déterminant de la matrice* $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 6 & 9 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & 6 & 9 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad ?$$

   $(n+1)3^n$.
5. *Donner une suite de 50 nombres consécutifs non-premiers.*
   $(51!+1, 51!+2, \dots, 51!+51)$.
6. *Résoudre la congruance :* $280x \equiv 4711 \pmod{7007}$.
   $x \equiv 192, 1193, 2194, 3195, 4196, 5197, 6198$.
7. *Calculer les limites :*
   $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^n}{F_n} = \sqrt{5}$.
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}} = 27$.
   $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2n}^{3n} \frac{1}{k} = log\frac{3}{2}$.

8.



(a) Combien y-a-t-il de chemins minimaux passant par Q mais pas par P ?

(b) Combien y-a-t-il de chemins minimaux passant sous la diagonale AB en la touchant mais sans la traverser ?
$C_{8+1} = \frac{1}{9}\left(\begin{array}{c}16\\8\end{array}\right) = 1430.$

9.2 Partie pratique

1. Simplifier le plus possible
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)$.
Solution : $\frac{(n2^{n+1})+1}{(n+1)(n+2)}$

2. Combien y a-t-il de matrices $2 \times n$ à coefficients entiers vérifiant les deux conditions suivantes :
   (a) dans chacune des 2 lignes, chacun des entiers 1,2,3,…,n apparaît une et une seule fois.
   (b) dans chacune des n colonnes, la valeur absolue de la différence des 2 coefficients est ≤ 1.

   Solution : $n!\ F_{n+1}$

3. Avec 26 lettres A,B,C,D,…,X,Y,Z de l'alphabet latin (chacun étant utilisé autant de fois qu'on veut), combien peut-on écrire de mots de n lettres ne contenant pas deux consonnes côte à côte ? (rappel : il y a 6 voyelles dans l'alphabet latin : A,E,I,O,U,Y)

   Récurrence à résoudre : $u_n = 6u_{n-1} + 120u_{n-2}$

4. Que vaut la somme de la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kF_k}{2^k} \qquad ?$$
   Solution : 10